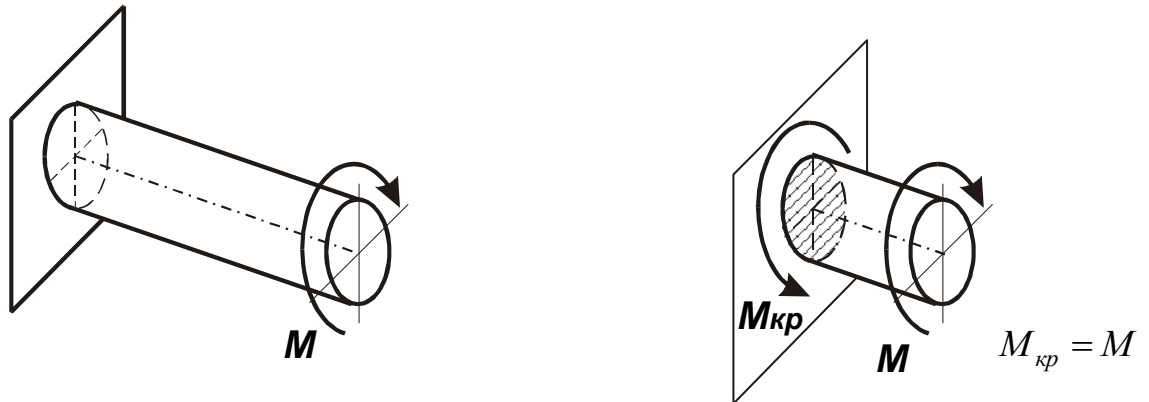


## Кручение

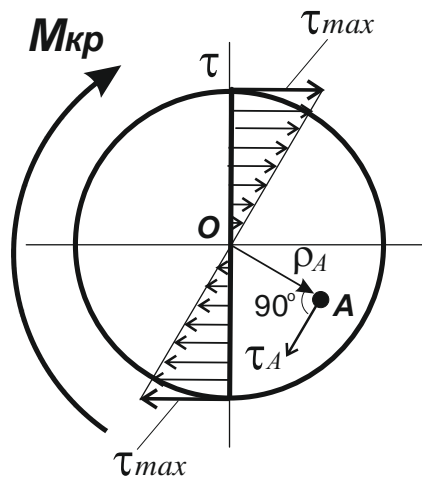
Чтобы возникла деформация кручения, внешние скручивающие моменты должны действовать в плоскости поперечного сечения бруса. Тогда в поперечных сечениях возникает внутренний силовой фактор – крутящий момент  $M$  ( $H \cdot м$ ,  $кН \cdot м$ ), равный сумме внешних моментов, действующих на отсеченную часть бруса.



## Напряжения при кручении

При кручении в поперечном сечении возникают касательные напряжения  $\tau$  ( $Па$ ,  $МПа$ ), вектор касательного напряжения лежит в плоскости поперечного сечения.

Напряжения в каждой точке сечения перпендикулярны радиусу, проведенному в эту точку, и пропорциональны расстоянию от точки до центра сечения. Наибольшие напряжения возникают на границе сечения.



## Связь напряжений с крутящим моментом

$$\tau = \frac{M_{кр}}{J_p} \rho$$

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_p}$$

$\rho$  – радиус-вектор точки сечения, в которой определяется напряжение,  $\rho_A = OA$   
 $J_p$ ,  $W_p$  – геометрические характеристики сечения.

## ***Геометрические характеристики, используемые в расчетах на кручение***

Полярный момент инерции сечения ( $m^4$ ):

$$J_p = \int_F \rho^2 dF,$$

$F$  – площадь сечения.

Полярный момент сопротивления сечения ( $m^3$ ):

$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{max}},$$

$\rho_{max}$  - наибольшие расстояния от центра до границы сечения.

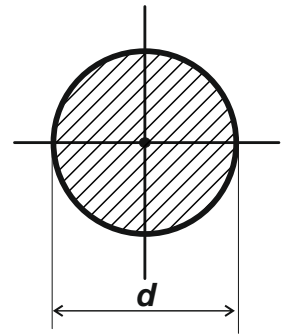
### ***Круглое сечение***

Полярный момент инерции сечения :

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1 d^4, \quad (m^4).$$

Полярный момент инерции сечения:

$$W_p = \frac{J_p}{0,5d} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2 d^3, \quad (m^3).$$



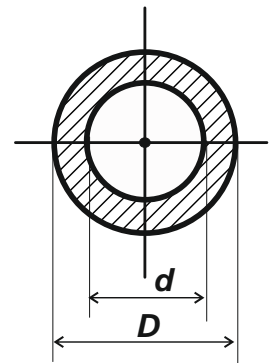
### ***Кольцевое (трубчатое) сечение***

Полярный момент инерции сечения :

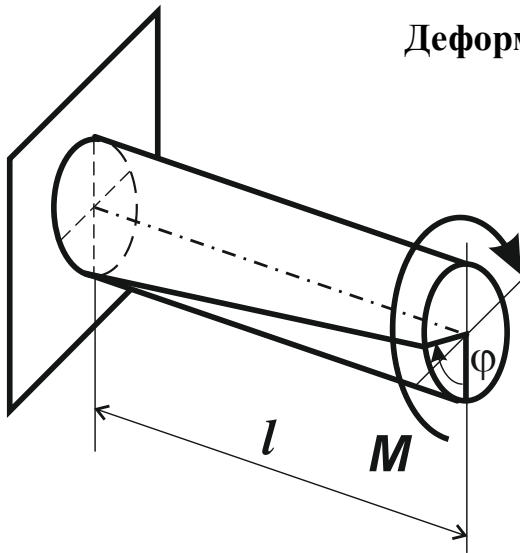
$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} \left( 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right) \approx 0,1 D^4 \left( 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right), \quad (m^4).$$

Полярный момент сопротивления сечения:

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} \left( 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right) \approx 0,2 D^3 \left( 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right), \quad (m^3).$$



### Деформации при кручении:



Угол закручивания  $\varphi$  (рад) – угол, на который повернется рассматриваемое сечение относительно неподвижного:

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{GJ_p},$$

относительный угол закручивания:

$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_{кр}}{GJ_p} \text{ (рад/м)},$$

$l$  – длина участка нагружения,  
 $GJ_p$  – жесткость сечения при кручении.

### Закон Гука при кручении:

$$\tau = G\rho\theta,$$

$G$  – модуль сдвига (характеризует жесткость материала на сдвиг и кручение),  
для стали  $G=8 \cdot 10^4$  МПа,

$\rho$  – радиус-вектор точки сечения, в которой определяется напряжение.

### Условие прочности при кручении:

$$\tau_{max} = \frac{|M_{кр}|}{W_p} \leq [\tau],$$

допускаемое касательное напряжение  $[\tau] \approx (0,5 \div 0,6)[\sigma]$ .

Из условия прочности можно определить диаметр круглого сечения:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{кр}}{0,2[\tau]}}$$

### Условие жесткости при кручении:

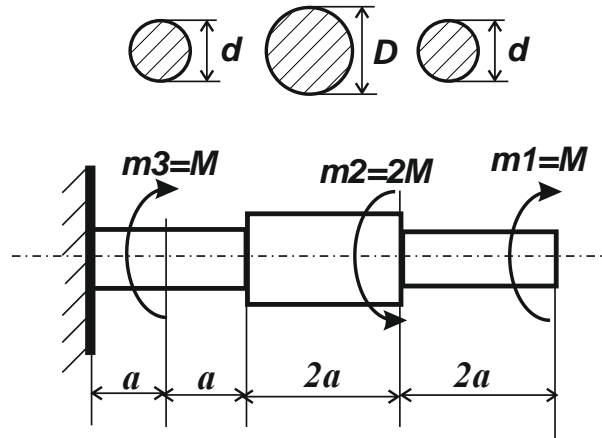
$$\theta_{max} = \frac{|M_{кр}|}{GJ_p} \leq [\theta],$$

допускаемый относительный угол закручивания  $[\theta] \approx 0,05$  рад/м.

Из условия жесткости можно определить диаметр круглого сечения:

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{M_{кр}}{0,1G[\theta]}}$$

## Задача1



Для статически определимого бруса круглого поперечного сечения необходимо:

- определить реактивный момент в жесткой заделке;
- определить крутящие моменты методом сечений, построить эпюру крутящих моментов;
- зная отношение диаметров для участков бруса, выразить геометрические характеристики сечений через один из диаметров;
- записать теоретические значения касательных напряжений, определить опасный участок;
- составить условие прочности для опасного участка; подобрать диаметры поперечных сечений  $d$ ,  $D$ , исходя из условия прочности;
- вычислить рабочие значения напряжений, построить эпюру касательных напряжений;
- вычислить углы закручивания  $\varphi$  участков и полный угол закручивания  $\varphi_{\text{полн}}$  бруса;
- вычислить угловые перемещения поперечных сечений бруса, построить эпюру угловых перемещений поперечных сечений.

Исходные данные:

Материал бруса - латунь;

модуль сдвига  $G=4 \cdot 10^4 \text{ МПа}=4 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ .

Допускаемое напряжение принять  $[\tau]=100 \text{ МПа}$ .

Скручивающий момент  $M=10 \text{ кН м}$ ; длина участков бруса  $a=0,1 \text{ м}$ .

$d$ ,  $D$  - искомые диаметры поперечных сечений бруса ( $D/d=2$ ).

### Решение

Определим реактивный момент  $M_A$ , возникающий в заделке  $A$ . Уравнение равновесия бруса – сумма моментов относительно продольной оси  $z$ :

$$\sum M_{zi} = 0: \quad M_A + M - 2M + M = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A = 0$$

Определим крутящие моменты на каждом участке нагружения, пользуясь методом сечений. Двигаемся по брусу от свободного конца к заделке:

I участок ( $0 \leq z \leq 2a$ ):  $M_I = -m_I = -M$ ,

$$\begin{aligned}\text{II участок } (2a \leq z \leq 4a): \quad M_2 &= -m_1 + m_2 = -M + 2M = M, \\ \text{III участок } (4a \leq z \leq 5a): \quad M_3 &= -m_1 + m_2 = -M + 2M = M, \\ \text{IV участок } (5a \leq z \leq 6a): \quad M_4 &= -m_1 + m_2 - m_3 = -M + 2M - M = 0.\end{aligned}$$

**Примечание:** Крутящий момент в сечении считается положительным, если он направлен в сечении против часовой стрелки.

Но, правило знаков для крутящих моментов можно ввести **произвольно**, учитывая, что внешние моменты, направленные в разные стороны, создают крутящие моменты противоположных знаков.

Строим эпюру крутящих моментов, откладывая положительные значения вверх от нулевой линии, отрицательные – вниз от нулевой линии. Значение крутящего момента на последнем участке должно совпасть со значением реактивного момента в жесткой заделке:

$$M_4 = M_A = 0$$

Выразим полярные моменты сопротивления поперечных сечений через диаметр  $d$  ( $D=2d$ ).

$$\begin{aligned}W_{p1} = W_{p3} = W_{p4} &= \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2 d^3; \\ W_{p2} &= \frac{\pi D^3}{16} = \frac{\pi (2d)^3}{16} \approx 1,6 d^3\end{aligned}$$

Полярные моменты инерции сечений бруса

$$\begin{aligned}J_{p1} = J_{p3} = J_{p4} &= \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1 d^4 \\ J_{p2} &= \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi (2d)^4}{32} \approx 1,6 d^4\end{aligned}$$

Максимальные касательные напряжения в поперечных сечениях бруса (на границе сечения):

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \frac{M_1}{W_{p1}} = \frac{-M}{0,2 d^3} = -5 \frac{M}{d^3} \\ \tau_2 &= \frac{M_2}{W_{p2}} = \frac{M}{1,6 d^3} = 0,625 \frac{M}{d^3}; \\ \tau_3 &= \frac{M_3}{W_{p3}} = \frac{M}{0,2 d^3} = 5 \frac{M}{d^3} \\ \tau_4 &= \frac{M_4}{W_{p4}} = 0\end{aligned}$$

Опасными участками являются первый и третий участки нагружения. Составим условие прочности для опасного участка вала и определим диаметр  $d$  из условия прочности:

$$\tau_{max} = |\tau_{1,3}| = 5 \frac{M}{d^3} \leq [\tau]$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{5M}{[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 10000 \text{ Нм}}{100 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2}} = 0,07937 \text{ м} = 79,37 \text{ мм}$$

$$D = 2d = 158,74 \text{ мм}$$

Вычислим касательные напряжения:

$$\tau_1 = -5 \frac{M}{d^3} = -5 \frac{10000 \text{ Нм}}{(0,07937)^3 \text{ м}^3} = -100 \cdot 10^6 \text{ Па} = -100 \text{ МПа}$$

$$\tau_2 = 0,625 \frac{M}{d^3} = 0,625 \frac{10000 \text{ Нм}}{(0,07937)^3 \text{ м}^3} = 12,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 12,5 \text{ МПа}$$

$$\tau_3 = 5 \frac{M}{d^3} = 5 \frac{10000 \text{ Нм}}{(0,07937)^3 \text{ м}^3} = 100 \cdot 10^6 \text{ Па} = 100 \text{ МПа}$$

$$\tau_4 = \frac{M_4}{W_{p4}} = 0$$

Строим эпюру нормальных напряжений  $\tau$ , откладывая положительные значения напряжений вверх от нулевой линии, отрицательные – вниз от нулевой линии. На опасном участке напряжение равно допускаемому по абсолютной величине, на остальных участках – более низкие напряжения.

Определим углы закручивания участков бруса:

$$\varphi_1 = \frac{M_1 l_1}{G J_{p1}} = \frac{-M \cdot 2a}{G \cdot 0,1d^4} = -20,0 \frac{Ma}{Gd^4};$$

$$\varphi_2 = \frac{M_2 l_2}{G J_{p2}} = \frac{M \cdot 2a}{G \cdot 1,6d^4} = 1,25 \frac{Ma}{Gd^4};$$

$$\varphi_3 = \frac{M_3 l_3}{G J_{p3}} = \frac{M \cdot a}{G \cdot 0,1d^4} = 10,0 \frac{Ma}{Gd^4};$$

$$\varphi_4 = \frac{M_4 l_4}{G J_{p4}} = 0$$

Здесь  $G$  – модуль сдвига материала (его жесткость),  
длины участков нагружения  $l_1 = 2a$ ,  $l_2 = 2a$ ,  $l_3 = a$ ,  $l_4 = a$

Полный угол закручивания бруса равен сумме углов закручивания участков:

$$\varphi_{полн} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = (-20 + 1,25 + 10 + 0) \frac{Ma}{Gd^4} = -8,75 \frac{Ma}{Gd^4} =$$

$$= -8,75 \frac{10000 \text{ Нм} \cdot 0,1 \text{ м}}{40000 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 \cdot (0,1)^4 \text{ м}^4} = -0,0022 \text{ рад} =$$

$$= -0,0022 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -0,126 \text{ град}$$

Определим угловые перемещения поперечных сечений, совпадающих с границами участков нагружения. Двигаемся по брусу от заделки к свободному концу. Угол поворота рассматриваемого сечения складывается из угла поворота предыдущего сечения и угла закручивания участка между сечениями.

Сечение  $A$  – неподвижно, так как оно жестко зашце́млено :

$$\text{сечение } A \text{ (жесткая заделка): } \Delta_{\varphi}^A = 0;$$

$$\text{сечение } B : \Delta_{\varphi}^B = \Delta_{\varphi}^A + \varphi_4 = 0;$$

$$\text{сечение } C : \Delta_{\varphi}^C = \Delta_{\varphi}^B + \varphi_3 = 10,0 \frac{Ma}{Gd^4};$$

$$\text{сечение } E : \Delta_{\varphi}^E = \Delta_{\varphi}^C + \varphi_2 = 11,25 \frac{Ma}{Gd^4};$$

$$\text{сечение } K : \Delta_{\varphi}^K = \Delta_{\varphi}^E + \varphi_1 = -8,75 \frac{Ma}{Gd^4}$$

Угол поворота крайнего правого сечения  $K$  должен быть равен полному углу закручивания бруса:

$$\Delta_{\varphi}^K = -8,75 \frac{Ma}{Gd^4} = \varphi_{\text{полн}}.$$

Строим эпюру угловых перемещений, соединяя перемещения в сечениях  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $E$ ,  $K$  прямыми наклонными линиями. Положительная область эпюры соответствует сечениям, повернувшимся в сторону внешнего момента  $m_2$ , принятого положительным. Отрицательная область эпюры соответствует сечениям, повернувшимся в сторону внешних моментов  $m_1$  и  $m_3$ , принятых отрицательными.

### **Правила контроля эпюр:**

Эпюра крутящих моментов ступенчатая, скачки на эпюре происходят по месту приложения внешних моментов на величину этих моментов.

Эпюра касательных напряжений ступенчатая, скачки на эпюре происходят по месту приложения внешних моментов и по месту изменения диаметра поперечного сечения.

Области положительных и отрицательных значений на эпюрах моментов и напряжений должны совпадать.

Эпюра угловых перемещений поперечных сечений кусочно-линейная. Положительная область эпюры соответствует сечениям, повернувшимся в направлении внешнего момента, принятого положительным. Отрицательная область эпюры соответствует сечениям, повернувшимся в направлении внешнего момента, принятого отрицательным. Угол поворота крайнего свободного сечения равен полному углу закручивания бруса.

