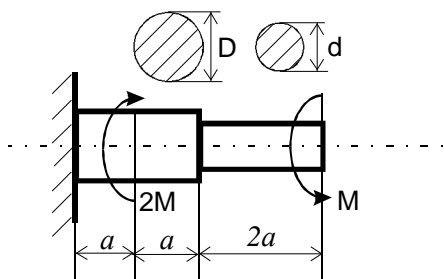
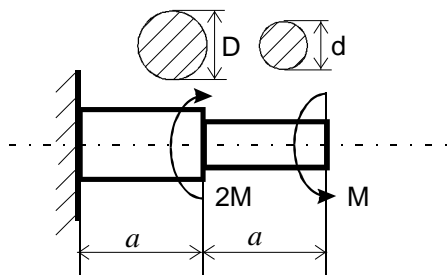


Билет №1



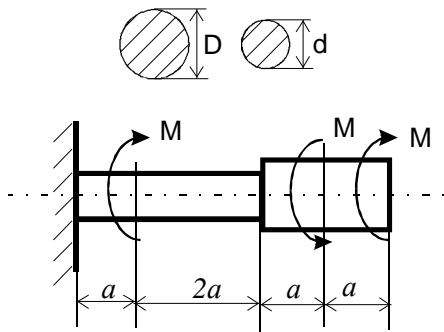
Задан статически определимый брус, работающий на кручение. Модуль сдвига $G = 40000 \text{ МПа}$, допускаемые напряжения принять равными $[\tau] = 100 \text{ МПа}$; момент $M = 10 \text{ кНм}$, длины участков стержня $a = 0,1 \text{ м}$. Подобрать диаметры поперечного сечения D и d ($D/d=2$), определить полный угол закручивания $\varphi_{\text{полн}}$. Построить эпюры крутящих моментов M , касательных напряжений на поверхности бруса τ , угловых перемещений сечений бруса φ .

Билет №2



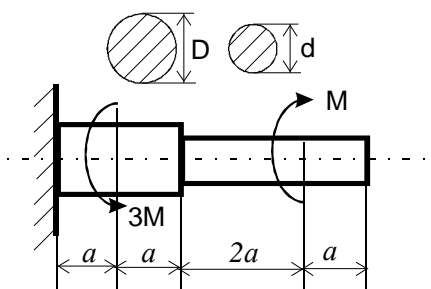
Задан статически определимый брус, работающий на кручение. Модуль сдвига $G = 40000 \text{ МПа}$, допускаемые напряжения принять равными $[\tau] = 100 \text{ МПа}$; момент $M = 10 \text{ кНм}$, длины участков стержня $a = 0,1 \text{ м}$. Подобрать диаметры поперечного сечения D и d ($D/d=2$), определить полный угол закручивания $\varphi_{\text{полн}}$. Построить эпюры крутящих моментов M , касательных напряжений на поверхности бруса τ , угловых перемещений сечений бруса φ .

Билет №3



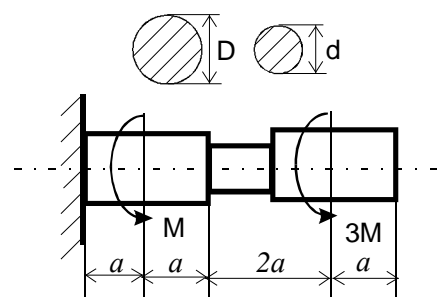
Задан статически определимый брус, работающий на кручение. Модуль сдвига $G = 40000 \text{ МПа}$, допускаемые напряжения принять равными $[\tau] = 100 \text{ МПа}$; момент $M = 10 \text{ кНм}$, длины участков стержня $a = 0,1 \text{ м}$. Подобрать диаметры поперечного сечения D и d ($D/d=2$), определить полный угол закручивания $\varphi_{\text{полн}}$. Построить эпюры крутящих моментов M , касательных напряжений на поверхности бруса τ , угловых перемещений сечений бруса φ .

Билет №4



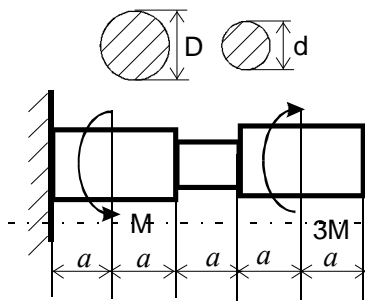
Задан статически определимый брус, работающий на кручение. Модуль сдвига $G = 40000 \text{ МПа}$, допускаемые напряжения принять равными $[\tau] = 100 \text{ МПа}$; момент $M = 10 \text{ кНм}$, длины участков стержня $a = 0,1 \text{ м}$. Подобрать диаметры поперечного сечения D и d ($D/d=2$), определить полный угол закручивания $\varphi_{\text{полн}}$. Построить эпюры крутящих моментов M , касательных напряжений на поверхности бруса τ , угловых перемещений сечений бруса φ .

Билет №5



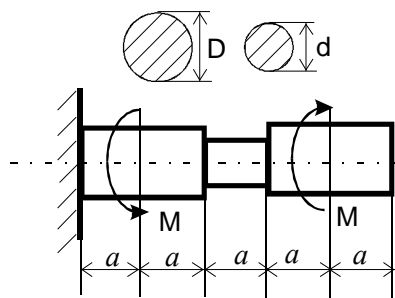
Задан статически определимый брус, работающий на кручение. Модуль сдвига $G = 40000 \text{ МПа}$, допускаемые напряжения принять равными $[\tau] = 100 \text{ МПа}$; момент $M = 10 \text{ кНм}$, длины участков стержня $a = 0,1 \text{ м}$. Подобрать диаметры поперечного сечения D и d ($D/d=2$), определить полный угол закручивания $\varphi_{\text{полн}}$. Построить эпюры крутящих моментов M , касательных напряжений на поверхности бруса τ , угловых перемещений сечений бруса φ .

Билет №6



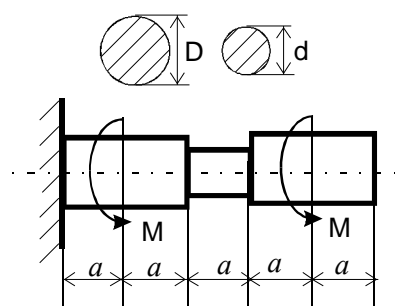
Задан статически определимый брус, работающий на кручение. Модуль сдвига $G = 40000 \text{ МПа}$, допускаемые напряжения принять равными $[\tau] = 100 \text{ МПа}$; момент $M = 10 \text{ кНм}$, длины участков стержня $a = 0,1 \text{ м}$. Подобрать диаметры поперечного сечения D и d ($D/d=2$), определить полный угол закручивания $\varphi_{\text{полн}}$. Построить эпюры крутящих моментов M , касательных напряжений на поверхности бруса τ , угловых перемещений сечений бруса φ .

Билет №7



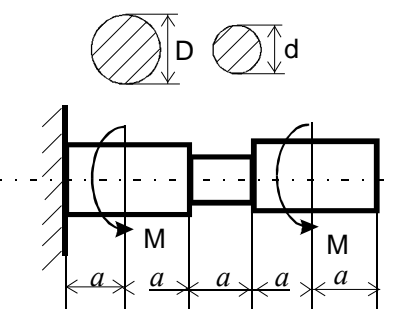
Задан статически определимый брус, работающий на кручение. Модуль сдвига $G = 40000 \text{ МПа}$, допускаемые напряжения принять равными $[\tau] = 100 \text{ МПа}$; момент $M = 10 \text{ кНм}$, длины участков стержня $a = 0,1 \text{ м}$. Подобрать диаметры поперечного сечения D и d ($D/d=2$), определить полный угол закручивания $\varphi_{\text{полн}}$. Построить эпюры крутящих моментов M , касательных напряжений на поверхности бруса τ , угловых перемещений сечений бруса φ .

Билет №8



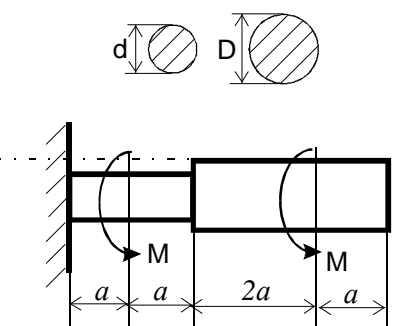
Задан статически определимый брус, работающий на кручение. Модуль сдвига $G = 40000 \text{ МПа}$, допускаемые напряжения принять равными $[\tau] = 100 \text{ МПа}$; момент $M = 10 \text{ кНм}$, длины участков стержня $a = 0,1 \text{ м}$. Подобрать диаметры поперечного сечения D и d ($D/d=2$), определить полный угол закручивания $\varphi_{\text{полн}}$. Построить эпюры крутящих моментов M , касательных напряжений на поверхности бруса τ , угловых перемещений сечений бруса φ .

Билет №9



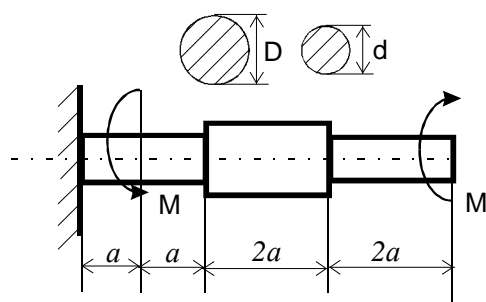
Задан статически определимый брус, работающий на кручение. Модуль сдвига $G = 40000 \text{ МПа}$, допускаемые напряжения принять равными $[\tau] = 100 \text{ МПа}$; момент $M = 10 \text{ кНм}$, длины участков стержня $a = 0,1 \text{ м}$. Подобрать диаметры поперечного сечения D и d ($D/d=2$), определить полный угол закручивания $\varphi_{\text{полн}}$. Построить эпюры крутящих моментов M , касательных напряжений на поверхности бруса τ , угловых перемещений сечений бруса φ .

Билет №10



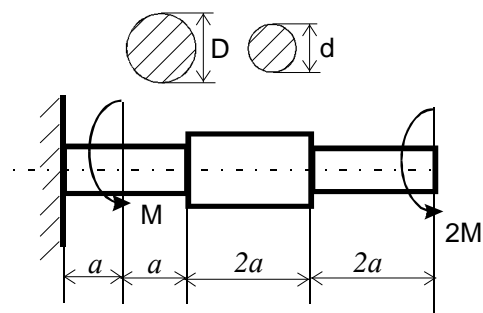
Задан статически определимый брус, работающий на кручение. Модуль сдвига $G = 40000 \text{ МПа}$, допускаемые напряжения принять равными $[\tau] = 100 \text{ МПа}$; момент $M = 10 \text{ кНм}$, длины участков стержня $a = 0,1 \text{ м}$. Подобрать диаметры поперечного сечения D и d ($D/d=2$), определить полный угол закручивания $\varphi_{\text{полн}}$. Построить эпюры крутящих моментов M , касательных напряжений на поверхности бруса τ , угловых перемещений сечений бруса φ .

Билет №11



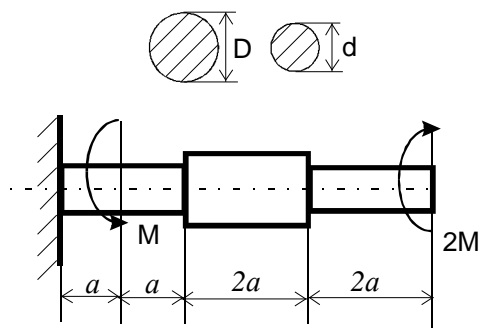
Задан статически определимый брус, работающий на кручение. Модуль сдвига $G = 40000 \text{ МПа}$, допускаемые напряжения принять равными $[\tau] = 100 \text{ МПа}$; момент $M = 10 \text{ кНм}$, длины участков стержня $a = 0,1 \text{ м}$. Подобрать диаметры поперечного сечения D и d ($D/d=2$), определить полный угол закручивания $\varphi_{\text{полн}}$. Построить эпюры крутящих моментов M , касательных напряжений на поверхности бруса τ , угловых перемещений сечений бруса φ .

Билет №12



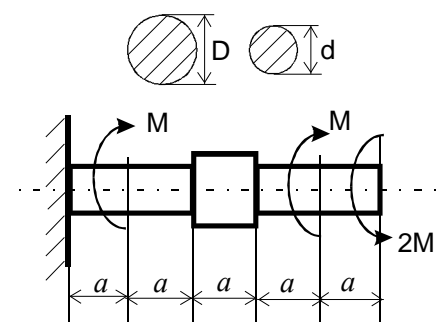
Задан статически определимый брус, работающий на кручение. Модуль сдвига $G = 40000 \text{ МПа}$, допускаемые напряжения принять равными $[\tau] = 100 \text{ МПа}$; момент $M = 10 \text{ кНм}$, длины участков стержня $a = 0,1 \text{ м}$. Подобрать диаметры поперечного сечения D и d ($D/d=2$), определить полный угол закручивания $\varphi_{\text{полн}}$. Построить эпюры крутящих моментов M , касательных напряжений на поверхности бруса τ , угловых перемещений сечений бруса φ .

Билет №13



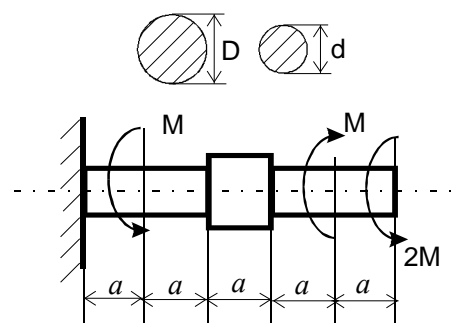
Задан статически определимый брус, работающий на кручение. Модуль сдвига $G = 40000 \text{ МПа}$, допускаемые напряжения принять равными $[\tau] = 100 \text{ МПа}$; момент $M = 10 \text{ кНм}$, длины участков стержня $a = 0,1 \text{ м}$. Подобрать диаметры поперечного сечения D и d ($D/d=2$), определить полный угол закручивания $\varphi_{\text{полн}}$. Построить эпюры крутящих моментов M , касательных напряжений на поверхности бруса τ , угловых перемещений сечений бруса φ .

Билет №14



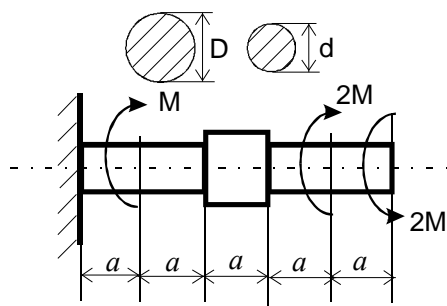
Задан статически определимый брус, работающий на кручение. Модуль сдвига $G = 40000 \text{ МПа}$, допускаемые напряжения принять равными $[\tau] = 100 \text{ МПа}$; момент $M = 10 \text{ кНм}$, длины участков стержня $a = 0,1 \text{ м}$. Подобрать диаметры поперечного сечения D и d ($D/d=2$), определить полный угол закручивания $\varphi_{\text{полн}}$. Построить эпюры крутящих моментов M , касательных напряжений на поверхности бруса τ , угловых перемещений сечений бруса φ .

Билет №15



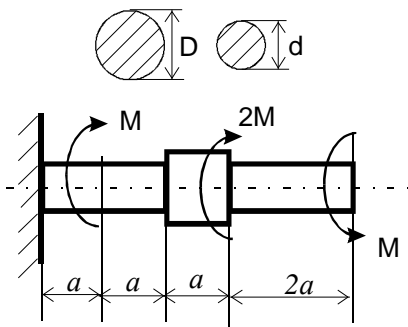
Задан статически определимый брус, работающий на кручение. Модуль сдвига $G = 40000 \text{ МПа}$, допускаемые напряжения принять равными $[\tau] = 100 \text{ МПа}$; момент $M = 10 \text{ кНм}$, длины участков стержня $a = 0,1 \text{ м}$. Подобрать диаметры поперечного сечения D и d ($D/d=2$), определить полный угол закручивания $\varphi_{\text{полн}}$. Построить эпюры крутящих моментов M , касательных напряжений на поверхности бруса τ , угловых перемещений сечений бруса φ .

Билет №16



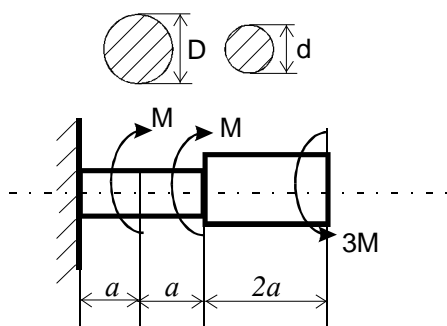
Задан статически определимый брус, работающий на кручение. Модуль сдвига $G = 40000 \text{ МПа}$, допускаемые напряжения принять равными $[\tau] = 100 \text{ МПа}$; момент $M = 10 \text{ кНм}$, длины участков стержня $a = 0,1 \text{ м}$. Подобрать диаметры поперечного сечения D и d ($D/d=2$), определить полный угол закручивания $\varphi_{\text{полн}}$. Построить эпюры крутящих моментов M , касательных напряжений на поверхности бруса τ , угловых перемещений сечений бруса φ .

Билет №17



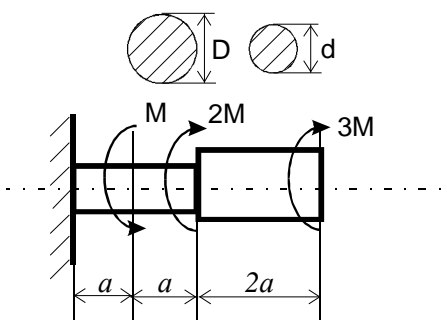
Задан статически определимый брус, работающий на кручение. Модуль сдвига $G = 40000 \text{ МПа}$, допускаемые напряжения принять равными $[\tau] = 100 \text{ МПа}$; момент $M = 10 \text{ кНм}$, длины участков стержня $a = 0,1 \text{ м}$. Подобрать диаметры поперечного сечения D и d ($D/d=2$), определить полный угол закручивания $\varphi_{\text{полн}}$. Построить эпюры крутящих моментов M , касательных напряжений на поверхности бруса τ , угловых перемещений сечений бруса φ .

Билет №18



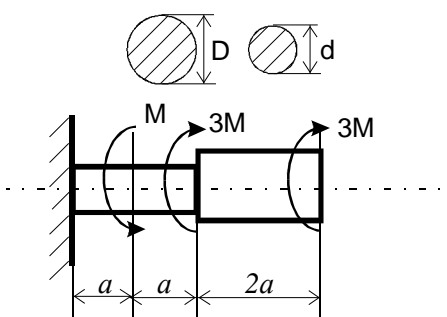
Задан статически определимый брус, работающий на кручение. Модуль сдвига $G = 40000 \text{ МПа}$, допускаемые напряжения принять равными $[\tau] = 100 \text{ МПа}$; момент $M = 10 \text{ кНм}$, длины участков стержня $a = 0,1 \text{ м}$. Подобрать диаметры поперечного сечения D и d ($D/d=2$), определить полный угол закручивания $\varphi_{\text{полн}}$. Построить эпюры крутящих моментов M , касательных напряжений на поверхности бруса τ , угловых перемещений сечений бруса φ .

Билет №19



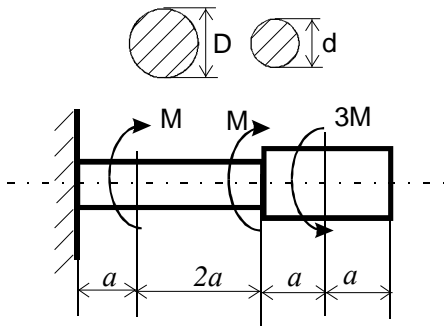
Задан статически определимый брус, работающий на кручение. Модуль сдвига $G = 40000 \text{ МПа}$, допускаемые напряжения принять равными $[\tau] = 100 \text{ МПа}$; момент $M = 10 \text{ кНм}$, длины участков стержня $a = 0,1 \text{ м}$. Подобрать диаметры поперечного сечения D и d ($D/d=2$), определить полный угол закручивания $\varphi_{\text{полн}}$. Построить эпюры крутящих моментов M , касательных напряжений на поверхности бруса τ , угловых перемещений сечений бруса φ .

Билет №20



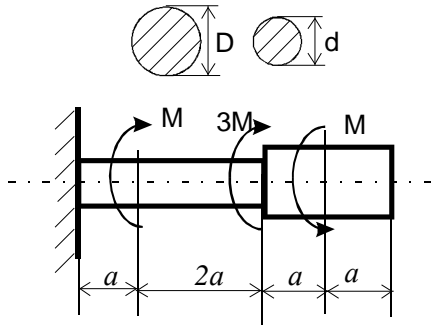
Задан статически определимый брус, работающий на кручение. Модуль сдвига $G = 40000 \text{ МПа}$, допускаемые напряжения принять равными $[\tau] = 100 \text{ МПа}$; момент $M = 10 \text{ кНм}$, длины участков стержня $a = 0,1 \text{ м}$. Подобрать диаметры поперечного сечения D и d ($D/d=2$), определить полный угол закручивания $\varphi_{\text{полн}}$. Построить эпюры крутящих моментов M , касательных напряжений на поверхности бруса τ , угловых перемещений сечений бруса φ .

Билет №21



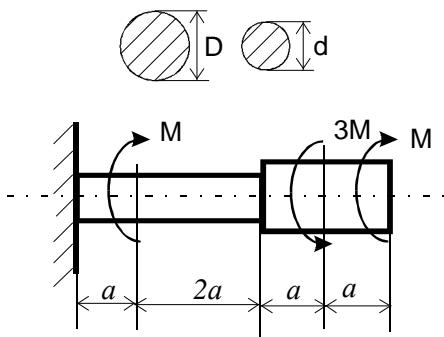
Задан статически определимый брус, работающий на кручение. Модуль сдвига $G = 40000 \text{ МПа}$, допускаемые напряжения принять равными $[\tau] = 100 \text{ МПа}$; момент $M = 10 \text{ кНм}$, длины участков стержня $a = 0,1 \text{ м}$. Подобрать диаметры поперечного сечения D и d ($D/d=2$), определить полный угол закручивания $\varphi_{\text{полн}}$. Построить эпюры крутящих моментов M , касательных напряжений на поверхности бруса τ , угловых перемещений сечений бруса φ .

Билет №22



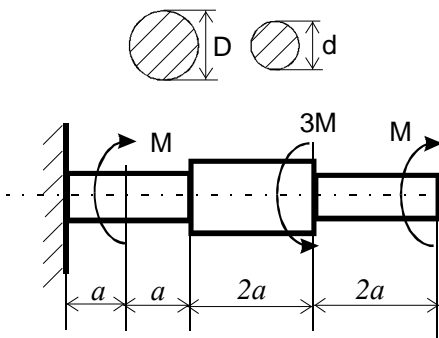
Задан статически определимый брус, работающий на кручение. Модуль сдвига $G = 40000 \text{ МПа}$, допускаемые напряжения принять равными $[\tau] = 100 \text{ МПа}$; момент $M = 10 \text{ кНм}$, длины участков стержня $a = 0,1 \text{ м}$. Подобрать диаметры поперечного сечения D и d ($D/d=2$), определить полный угол закручивания $\varphi_{\text{полн}}$. Построить эпюры крутящих моментов M , касательных напряжений на поверхности бруса τ , угловых перемещений сечений бруса φ .

Билет №23



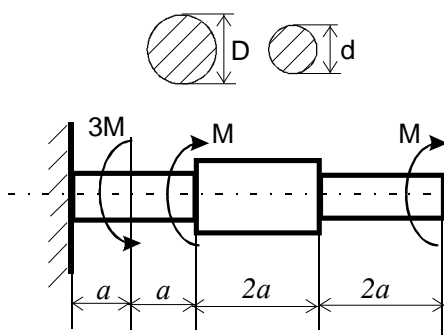
Задан статически определимый брус, работающий на кручение. Модуль сдвига $G = 40000 \text{ МПа}$, допускаемые напряжения принять равными $[\tau] = 100 \text{ МПа}$; момент $M = 10 \text{ кНм}$, длины участков стержня $a = 0,1 \text{ м}$. Подобрать диаметры поперечного сечения D и d ($D/d=2$), определить полный угол закручивания $\varphi_{\text{полн}}$. Построить эпюры крутящих моментов M , касательных напряжений на поверхности бруса τ , угловых перемещений сечений бруса φ .

Билет №24



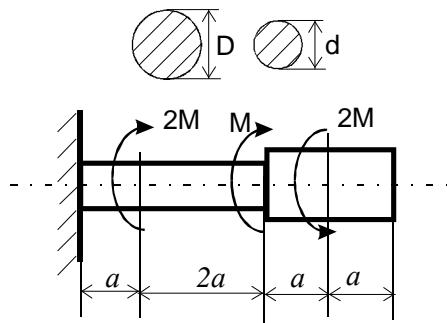
Задан статически определимый брус, работающий на кручение. Модуль сдвига $G = 40000 \text{ МПа}$, допускаемые напряжения принять равными $[\tau] = 100 \text{ МПа}$; момент $M = 10 \text{ кНм}$, длины участков стержня $a = 0,1 \text{ м}$. Подобрать диаметры поперечного сечения D и d ($D/d=2$), определить полный угол закручивания $\varphi_{\text{полн}}$. Построить эпюры крутящих моментов M , касательных напряжений на поверхности бруса τ , угловых перемещений сечений бруса φ .

Билет №25



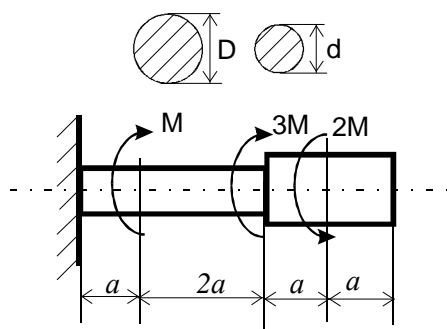
Задан статически определимый брус, работающий на кручение. Модуль сдвига $G = 40000 \text{ МПа}$, допускаемые напряжения принять равными $[\tau] = 100 \text{ МПа}$; момент $M = 10 \text{ кНм}$, длины участков стержня $a = 0,1 \text{ м}$. Подобрать диаметры поперечного сечения D и d ($D/d=2$), определить полный угол закручивания $\varphi_{\text{полн}}$. Построить эпюры крутящих моментов M , касательных напряжений на поверхности бруса τ , угловых перемещений сечений бруса φ .

Билет №26



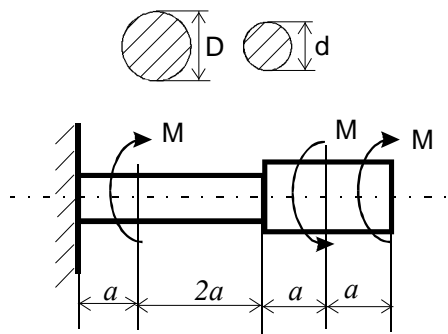
Задан статически определимый брус, работающий на кручение. Модуль сдвига $G = 40000 \text{ МПа}$, допускаемые напряжения принять равными $[\tau] = 100 \text{ МПа}$; момент $M = 10 \text{ кНм}$, длины участков стержня $a = 0,1 \text{ м}$. Подобрать диаметры поперечного сечения D и d ($D/d=2$), определить полный угол закручивания $\varphi_{\text{полн}}$. Построить эпюры крутящих моментов M , касательных напряжений на поверхности бруса τ , угловых перемещений сечений бруса φ .

Билет №27



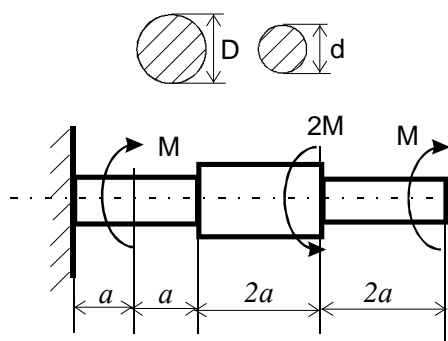
Задан статически определимый брус, работающий на кручение. Модуль сдвига $G = 40000 \text{ МПа}$, допускаемые напряжения принять равными $[\tau] = 100 \text{ МПа}$; момент $M = 10 \text{ кНм}$, длины участков стержня $a = 0,1 \text{ м}$. Подобрать диаметры поперечного сечения D и d ($D/d=2$), определить полный угол закручивания $\varphi_{\text{полн}}$. Построить эпюры крутящих моментов M , касательных напряжений на поверхности бруса τ , угловых перемещений сечений бруса φ .

Билет №28



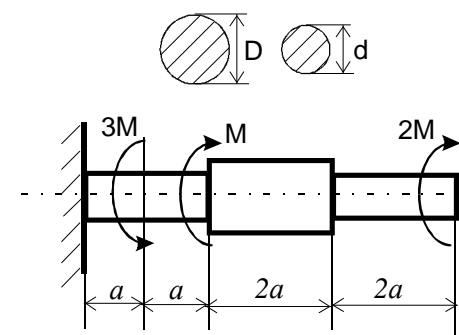
Задан статически определимый брус, работающий на кручение. Модуль сдвига $G = 40000 \text{ МПа}$, допускаемые напряжения принять равными $[\tau] = 100 \text{ МПа}$; момент $M = 10 \text{ кНм}$, длины участков стержня $a = 0,1 \text{ м}$. Подобрать диаметры поперечного сечения D и d ($D/d=2$), определить полный угол закручивания $\varphi_{\text{полн}}$. Построить эпюры крутящих моментов M , касательных напряжений на поверхности бруса τ , угловых перемещений сечений бруса φ .

Билет №29



Задан статически определимый брус, работающий на кручение. Модуль сдвига $G = 40000 \text{ МПа}$, допускаемые напряжения принять равными $[\tau] = 100 \text{ МПа}$; момент $M = 10 \text{ кНм}$, длины участков стержня $a = 0,1 \text{ м}$. Подобрать диаметры поперечного сечения D и d ($D/d=2$), определить полный угол закручивания $\varphi_{\text{полн}}$. Построить эпюры крутящих моментов M , касательных напряжений на поверхности бруса τ , угловых перемещений сечений бруса φ .

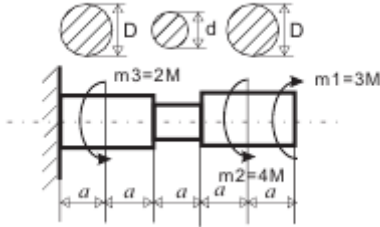
Билет №30



Задан статически определимый брус, работающий на кручение. Модуль сдвига $G = 40000 \text{ МПа}$, допускаемые напряжения принять равными $[\tau] = 100 \text{ МПа}$; момент $M = 10 \text{ кНм}$, длины участков стержня $a = 0,1 \text{ м}$. Подобрать диаметры поперечного сечения D и d ($D/d=2$), определить полный угол закручивания $\varphi_{\text{полн}}$. Построить эпюры крутящих моментов M , касательных напряжений на поверхности бруса τ , угловых перемещений сечений бруса φ .

Задача на кручение

Задан статически определимый брус, работающий на кручение. Модуль сдвига $G=40000$ МПа, допускаемые напряжения принять равными $[\tau]=100$ МПа; момент $M=10$ кНм, длины участков стержня $a=0,1$ м. Подобрать диаметры поперечного сечения D и d ($D/d=2$), определить полный угол закручивания $\varphi_{полн}$. Построить эпюры крутящих моментов M , касательных напряжений на поверхности бруса τ , угловых перемещений сечений бруса φ .



Решение

Определим реактивный момент M_A , возникающий в заделке.

Уравнение равновесия бруса:

$$M_A - m_1 + m_2 + m_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A = m_1 - m_2 - m_3 = -3M = -30 \text{ кНм}$$

Определим крутящие моменты на каждом участке нагружения, пользуясь методом сечений:

I участок ($0 \leq z \leq a$):

$$M_1 = -m_1 = -3M = -30 \text{ кНм}$$

II участок ($a \leq z \leq 2a$):

$$M_2 = -m_1 + m_2 = M = 10 \text{ кНм}$$

III участок ($2a \leq z \leq 3a$):

$$M_3 = -m_1 + m_2 = M = 10 \text{ кНм}$$

IV участок ($3a \leq z \leq 4a$):

$$M_4 = -m_1 + m_2 = M = 10 \text{ кНм}.$$

V участок ($4a \leq z \leq 5a$):

$$M_5 = -m_1 + m_2 + m_3 = 3M = 30 \text{ кНм}.$$

Выразим моменты сопротивления поперечных сечений через диаметр d ($D=2d$).

$$W_{p1} = W_{p2} = W_{p4} = W_{p5} = \frac{\pi D^3}{16} = \frac{\pi (2d)^3}{16} \approx 1,6 d^3;$$

$$W_{p3} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2 d^3$$

Полярные моменты инерции сечений бруса

$$J_{p1} = J_{p2} = J_{p4} = J_{p5} = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi (2d)^4}{32} \approx 1,6 d^4$$

$$J_{p3} = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1 d^4$$

Максимальные касательные напряжения в поперечных сечениях бруса (на поверхности бруса):

$$\tau_1 = \frac{M_1}{W_{p1}} = \frac{-3M}{1,6d^3} = -1,875 \frac{M}{d^3}$$

$$\tau_2 = \frac{M_2}{W_{p2}} = \frac{M}{1,6d^3} = 0,625 \frac{M}{d^3}$$

$$\tau_3 = \frac{M_3}{W_{p3}} = \frac{M}{0,2d^3} = 5 \frac{M}{d^3} \quad ;$$

$$\tau_4 = \frac{M_4}{W_{p4}} = \frac{M}{1,6d^3} = 0,625 \frac{M}{d^3}$$

$$\tau_5 = \frac{M_5}{W_{p5}} = \frac{3M}{1,6d^3} = 1,875 \frac{M}{d^3}$$

Опасным участком является третий участок нагружения. Составим условие прочности для опасного участка вала и определим диаметр d из условия прочности:

$$\tau_{max} = \tau_3 = 5 \frac{M}{d^3} \leq [\tau]$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{5M}{[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 10000}{100 \cdot 10^6}} = 0,0794 \text{ м} = 79,4 \text{ мм}$$

$$D = 2d = 158,8 \text{ мм}$$

Вычислим касательные напряжения:

$$\tau_1 = -1,875 \frac{M}{d^3} = -1,875 \frac{10000}{(0,0794)^3} = -37,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = -37,5 \text{ МПа}$$

$$\tau_2 = 0,625 \frac{M}{d^3} = 0,625 \frac{10000}{(0,0794)^3} = 12,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 12,5 \text{ МПа}$$

$$\tau_3 = 5 \frac{M}{d^3} = 5 \frac{10000}{(0,0794)^3} = 100 \cdot 10^6 \text{ Па} = 100 \text{ МПа} \quad ;$$

$$\tau_4 = 0,625 \frac{M}{d^3} = 0,625 \frac{10000}{(0,0794)^3} = 12,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 12,5 \text{ МПа}$$

$$\tau_5 = 1,875 \frac{M}{d^3} = 1,875 \frac{10000}{(0,0794)^3} = 37,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 37,5 \text{ МПа}$$

Определим углы закручивания участков бруса:

$$\varphi_1 = \frac{M_1 l_1}{G J_{p1}} = \frac{-3M \cdot a}{G \cdot 1,6d^4} = -1,875 \frac{Ma}{Gd^4};$$

$$\varphi_2 = \frac{M_2 l_2}{G J_{p2}} = \frac{M \cdot a}{G \cdot 1,6d^4} = 0,625 \frac{Ma}{Gd^4};$$

$$\varphi_3 = \frac{M_3 l_3}{G J_{p3}} = \frac{M \cdot a}{G \cdot 0,1d^4} = 10 \frac{Ma}{Gd^4};$$

$$\varphi_4 = \frac{M_4 l_4}{G J_{p4}} = \frac{M \cdot a}{G \cdot 1,6d^4} = 0,625 \frac{Ma}{Gd^4};$$

$$\varphi_5 = \frac{M_5 l_5}{G J_{p5}} = \frac{3M \cdot a}{G \cdot 1,6d^4} = 1,875 \frac{Ma}{Gd^4}$$

Полный угол закручивания бруса:

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{полн}} &= \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 = 11,25 \frac{Ma}{Gd^4} = \\ &= 11,25 \frac{10000 \cdot 0,1}{40000 \cdot 10^6 \cdot (0,0794)^4} = 0,0071 \text{ рад} \end{aligned}$$

Определим угловые перемещения поперечных сечений, совпадающих с границами участков нагружения:

сечение A (жесткая заделка): $\varphi_A = 0;$

сечение B : $\varphi_B = \varphi_A + \varphi_5 = 1,875 \frac{Ma}{Gd^4};$

сечение C : $\varphi_C = \varphi_B + \varphi_4 = 2,5 \frac{Ma}{Gd^4};$

сечение E : $\varphi_E = \varphi_C + \varphi_3 = 12,5 \frac{Ma}{Gd^4};$

сечение K : $\varphi_K = \varphi_E + \varphi_2 = 13,125 \frac{Ma}{Gd^4};$

сечение L : $\varphi_L = \varphi_K + \varphi_1 = 11,25 \frac{Ma}{Gd^4} = \varphi_{\text{полн}}$

